Proseminar Hydrologie
WS 2005/2006

Die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit: Mualem - Van Genuchten – Modell

08.12.2005

Albert – Ludwigs - Universität Freiburg
Institut für Hydrologie
Dozent: Dr. Christoph Külls
Referent: Matthias Gaßmann

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

1980 formulierte VAN GENUCHTEN, dass es äußerst schwierig sei, verlässliche Aussagen über die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit zu machen. Die Hauptprobleme seien dabei, dass diese im Arbeitsgebiet oft erheblich variiert und die Messungen sehr langwierig und teuer seien.
Deshalb wurden Modelle eingesetzt um die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit zu berechnen, die aber oft ziemlich mühsam anzuwenden sind. BROOKS UND COREY und auch JEPPSON entwickelten daher schon vor VAN GENUCHTEN in sich geschlossene kurz gehaltene Gleichungen, die allerdings ein ungenaues Modell der Saugspannungskurve beinhalteten. Diese Kurven haben nicht die auch bei Messungen bestätigte typische S-Form. Diese Form hat Van Genuchten in seinem Modell berücksichtigt und dann mit der Gleichung von Mualem kombiniert (VAN GENUCHTEN 1980). So hat er einen verbesserten Ansatz zur Berechnung der ungesättigten hydraulischen Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Matrixpotential geschaffen.

2. Grundbegriffe

2.1 Die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit

Wie auch im gesättigten Fall, kann im ungesättigten die Fließgleichung nach DARCY angewandt werden um die Wasserbewegung im Boden zu beschreiben (HARTKE UND HORN 1999, S. 149):

$$q = K \frac{\Delta h}{\Delta l} \tag{1}$$

wobei q der Wasserfluss je Zeiteinheit, Δh der Potentialunterschied, Δl die Fließstrecke und K eine Proportionalitätskonstante, die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit, ist (HARTKE UND HORN 1999, S. 143). Die Bestimmung dieser Proportionalitätskonstate ist Gegenstand dieser Arbeit.

2.2 Das Matrixpotential

Die Wasserbewegung in der ungesättigten Zone findet aufgrund von Potentialunterschieden zwischen Gravitations- und Matrixpotential statt (HARTKE UND HORN 1999). Da im Folgenden das Matrixpotential eine entscheidende Rolle spielt wird nun noch genauer darauf eingegangen.
Das Matrixpotential umfasst die Kräfte, die das Wasser im Boden entgegen der Schwerkraft festhalten. Dies sind zum einen die Adsorptionskräfte, welche das Wasser in dünnen Filmen an der Partikeloberfläche festhalten. Bei geringem Bodenwassergehalt wirken nur diese Kräfte. Zum anderen sind Kapillarkräfte wirksam, welche Menisken von Wasser in den Kapillaren festhalten. Zusammen werden diese Kräfte auch Matrixkräfte genannt. Um nun Wasser im Boden zu bewegen muss Arbeit geleistet werden. Daraus folgt, dass das Bodenwasser bezogen auf eine Null-Ebene potentielle Energie besitzt (BAUMGARTNER & LIEBSCHER 1996).

Wird der durch die Matrixkräfte verursachte Anteil der potentiellen Energie nun auf eine Volumen- (dann Einheit $\frac{N}{cm^2}$) oder Masseneinheit (dann cm) des Bodenwassers bezogen nennt man ihn das Matrixpotential oder auch Saugspannung (BAUMGARTNER & LIEBSCHER 1996).
Der häufig verwendete pF-Wert (pF-Kurve) ist lediglich der dekadische Logarithmus des Matrixpotentials (HARTKE UND HORN 1999).

3. Gleichung nach Mualem

MUALEM entwickelte 1976 eine Gleichung mit der man anhand des Matrixpotentials den Anteil der ungesättigten hydraulischen Leitfähigkeit an der gesättigten berechnen kann (VAN GENUCHTEN 1980). Der Ansatz für die relative ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit K_r lautet:

$$K_r = \Theta^l \cdot \left[\frac{\int_0^{\Theta} \frac{1}{h(x)} dx}{\int_0^{1} \frac{1}{h(x)} dx} \right]^2 \tag{2}$$

wobei

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \tag{3}$$

$h(x)$ bezeichnet hier das Matrixpotential und Θ den normalisierten Wassergehalt des Bodens. θ ist der momentane, θ_r und θ_s sind der residuale bzw. der Wassergehalt bei Sättigung des Bodens. l ist ein unbekannter Parameter für den VAN GENUCHTEN den Wert 0,5 ermittelt hat (BAUMGARTNER & LIEBSCHER 1996). Deshalb wird im Folgenden nur noch der Parameter l = 0,5 verwendet. Andere Autoren haben Werte zwischen -8,73 und >> 100 gefunden, wobei das geometrische Mittel bei 0,63 mit einem 95% Konfidenzintervall zwischen -0,88 und 2,44 liegt (SCHAAP UND LEIJ 2000).

4. Saugspannungskurve nach Van Genuchten

Eine mathematische Beschreibung der Sauspannungskurve lieferte Van Genuchten 1980 (BAUMGARTNER & LIEBSCHER 1996, S.390):

$$\Theta = \left[\frac{1}{1 + (\alpha h)^n} \right]^m \tag{4}$$

In Gleichung (4) ist h wieder das Matrixpotential, während $\alpha\ (in\ cm^{-1}), n, m$ Konstanten sind. VAN GENUCHTEN (1980) gibt folgende Anhängigkeit der konstanten m und n an:

$$m = 1 - \frac{1}{n} \qquad (5)$$

Für α werden Werte zwischen 0,005 (tonreiche Böden) und 0,035 (sandige Böden), für n Werte von 1,5 (tonreich) bis 4,5 (sandig) verwendet (HARTKE UND HORN 1999, S. 137, zitieren WOESTEN UND VAN GENUCHTEN 1988).

Umstellen und Einsetzen der Gleichungen (3) und (4) ergibt die Kurve in gewohnter Form als Abhängigkeit des Matrixpotentials von der Bodenfeuchte:

$$h(\theta) = \left(\left(\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \right)^{-\frac{1}{m}} - 1 \right)^{\frac{1}{n}} \cdot \frac{1}{\alpha} \qquad (6)$$

Trägt man nun den dekadischen Logarithmus von h (pF-Wert) gegen die Bodenfeuchte auf, ergibt sich die gewohnte Form der pF – Kurve.
Fügt man eine weitere Kurve hinzu und verändert den Parameter α kann auch die in der Realität oft auftretende Hysterese der pF-Kurve beschrieben werden (Abb.1).

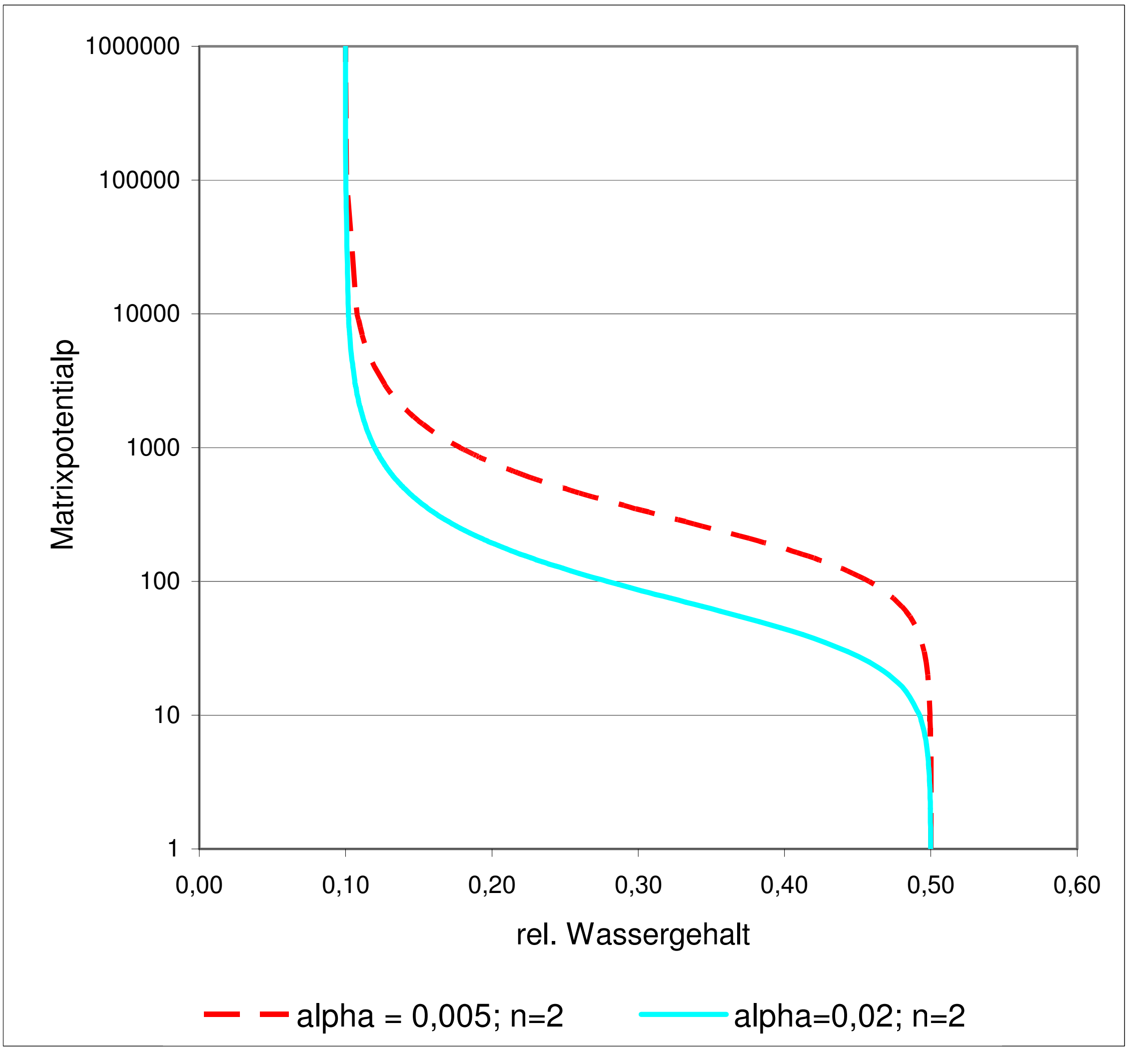

Abb. 1: pF- Kurve für verschiedene Alpha-Werte (Hysterese – Kurve)

5. Kombination der Gleichungen

VAN GENUCHTEN (1980) kombinierte MUALEMS Ansatz zur Beschreibung der ungesättigten hydraulischen Leitfähigkeit (Gleichung (2)) mit seinem Ansatz der Saugspannungskurve (Gleichung (4)) und erhielt das anschließend so genannte Mualem – Van Genuchten – Modell für den Anteil der ungesättigten an der gesättigten Wasserleitfähigkeit (Abb.2):

$$K_r = \Theta^{\frac{1}{2}}\left[1-(1-\Theta^{\frac{1}{m}})^m\right]^2 \tag{7}$$

wobei immer noch gilt:

$$\Theta = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad \text{und} \quad m = 1 - \frac{1}{n}$$

Ebenso ist es durch Einsetzen der Gleichung (4) möglich Gleichung (7) in Abhängigkeit vom Matrixpotential zu anzugeben (Abb. 3)

$$K_r = \frac{\left(1-(\alpha h)^{n-1}\cdot\left(1+(\alpha h)^n\right)^{-m}\right)^2}{\left(1+(\alpha h)^n\right)^{\frac{m}{2}}} \tag{8}$$

Mit diesen beiden Ansätzen ist es nun möglich den Anteil der ungesättigten hydraulischen Leitfähigkeit an der gesättigten allein aus der Kenntnis der Saugspannungskurve zu berechnen.

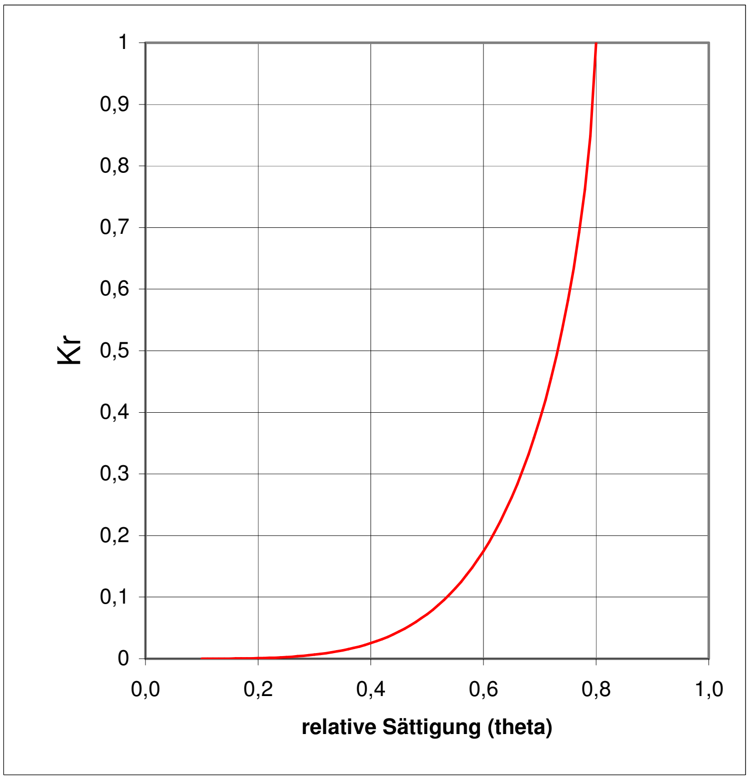

Abb. 2: relative ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der relativen Sättigung θ. Parameter: n=3, α =0,005 (1/cm), θ_r =0,04 und θ_s =0,8

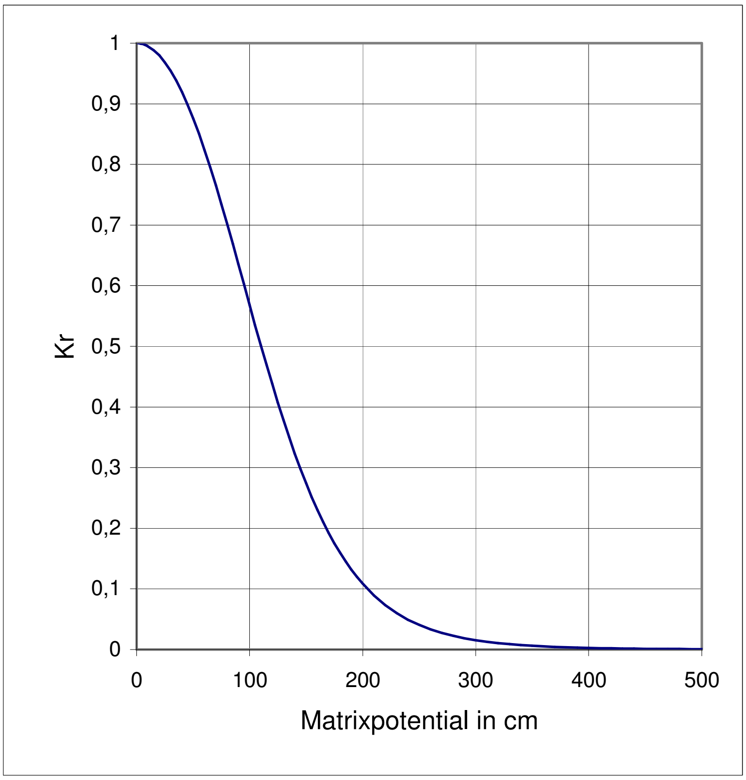

Abb. 3: relative ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit in Abhängigkeit vom Matrixpotential. Parameter: n=3, α =0,005 (1/cm), θ_r =0,04 und θ_s =0,8

6. Ermittlung der erforderlichen Daten

6.1 Messungen

VAN GENUCHTEN (1980) weist darauf hin, dass der gesättigte Bodenwassergehalt und der residuale Bodenwassergehalt sehr einfach zu messen sind und deshalb praktisch immer zur Verfügung stehen.
Falls der residuale Gehalt nicht zur Verfügung steht muss er durch Extrapolation der Saugspannungskurve bestimmt werden, die auf verschiedene Weisen experimentell gewonnen werden kann (HARTKE UND HORN 1999, S. 135).
Der momentane Bodenwassergehalt kann ebenfalls leicht experimentell gewonnen werden (Tetha – Sode, …).
Das Matrixpotential kann mit einem Tensiometer gemessen werden (HARTKE UND HORN 1999, S. 122). Dies wird nötig, um die Konstanten α und n anzupassen. Ist die Messung des Matrixpotentials nicht möglich, können die Konstanten auch abgeschätzt werden.

6.2 Parameterberechnung nach VAN GENUCHTEN (1980)

Van Genuchten (1980) gibt ein Verfahren an, um die Parameter aus einer gemessenen Saugspannungskurve zu bestimmen. Da die Herleitung der Gleichungen den Rahmen sprengen würde, werden nur die Ergebnisse angegeben.

Zuerst muss der Wendepunkt in der pF-Kurve bestimmt werden (Abb.4). Das ist genau der Punkt, bei dem $\Theta = \frac{1}{2}$ ist. Dann bestimmt man die Tangentensteigung S im Wendepunkt und rechnet sie um in die dimensionslose Steigung

$$S_P = \frac{1}{\theta_s - \theta_r} \cdot S \tag{9}$$

Der Parameter m kann dann bestimmt werden über:

$$m = \begin{cases} 1 - \exp(-0{,}8 \cdot S_P) & \text{falls } (0 \le S_P \le 1) \\ 1 - \dfrac{0{,}5755}{S_P} + \dfrac{0{,}1}{S_P^{\ 2}} + \dfrac{0{,}025}{S_P^{\ 3}} & \text{falls } S_P > 1 \end{cases} \tag{10}$$

Aus m kann dann über Gleichung (5) der Parameter n berechnet werden.

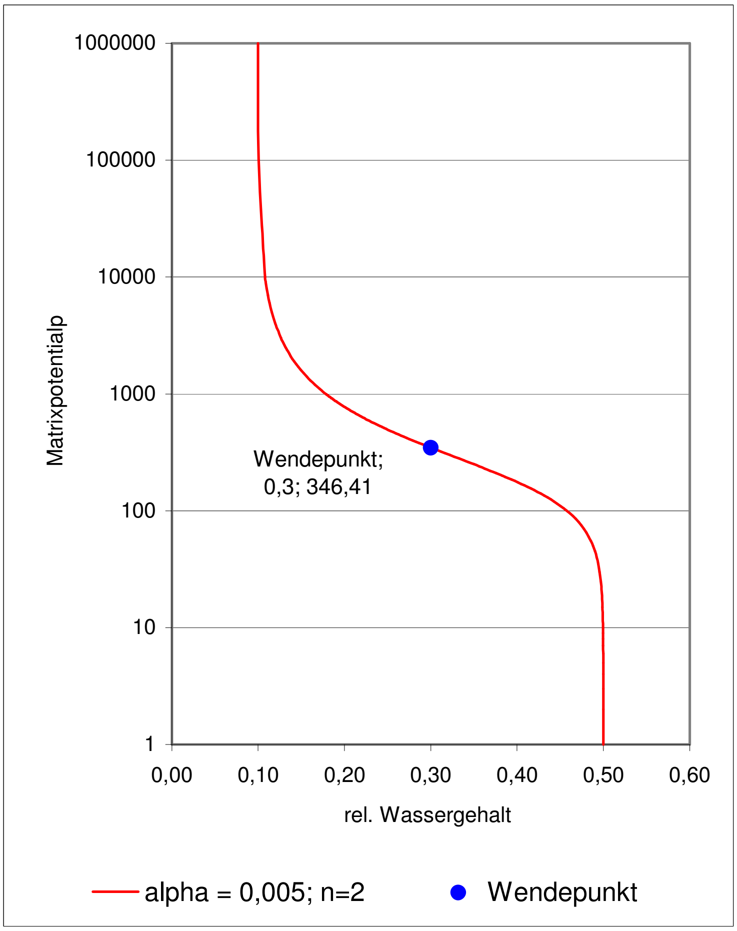

Abb. 4: pF-Kurve mit Wendepunkt $\Theta = \frac{1}{2}$

Um den Parameter α zu berechnen, benötigen wir den Matrixpotentialwert h_P des Wendepunktes und den bereits bestimmten Parameter m:

$$\alpha = \frac{1}{h_P}(2^{\frac{1}{m}} - 1)^{1-m}. \tag{11}$$

7. Fazit

Da es sehr aufwendig und teuer ist, die ungesättigte hydraulische Leitfähigkeit experimentell zu bestimmen, ist es im Hinblick auf Bodenwasserhaushaltsmodelle und andere Anwendungen wohl unumgänglich diese über Gleichungen abzuschätzen (SCHACK-KIRCHER im Gespräch, 06.12.2005). Das Mualem – Van Genuchten – Modell ist eine relativ einfache Möglichkeit dies zu machen.
Dabei sollte man aber immer im Hinterkopf behalten, dass gerade bei diesem Modell vorher bereits die gesättigte Wasserleitfähigkeit bekannt sein muss, und die Fehler, die eventuell bei dieser Messung schon gemacht wurden, sich vererben. So kann ein Regenwurmgang das Ergebnis dort schon um Zehnerpotenzen verändern.

Literaturverzeichnis

BAUMGARTNER A: & LIEBSCHER H.-J.(1996) Allgemeine Hydrologie – quantitative Hydrologie, 2. Aufl., Borntraeger, Berlin, Stuttgart, 694 S.

HARTKE, KARL HEINRICH UND HORN, RAINER (1999) Einführung in die Bodenphysik, 3., überarbeitete Auflage, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart

SCHAAP, MARCEL G. AND LEIJ, FEIKE J. (2000) Improved Prediction of Unsaturated Hydraulic Conductivity with the Mualem – van Genuchten Model, Soil Science Society of America Journal. 64: Pages 843-851. 2000

VAN GENUCHTEN, M. TH. (1980) A Closed-Form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils, Soil Science Society of America Journal. 44: Pages 892-898. 1980